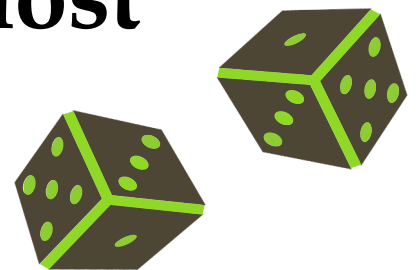


Různé metody manažerství kvality

Pravděpodobnost



$$p(A) = \frac{m_{\text{počet příznivých výsledků}}}{n_{\text{počet všech možných výsledků}}}$$

Martin Bažant

Obsah

Úvod	04
1 Pravděpodobnost	04
1.1 Teorie	04
1.2 Demonstrace pravděpodobnosti na hodech dvěma kostkami.....	05
1.3 Pravidla pro počítání pravděpodobností	06
1.3.1 Průnik pravděpodobností	06
1.3.2 Sjednocení neslučitelných jevů	06
1.4 Hod mincí	07
2 Náhodná veličina a binomické rozdělení	08
Použitá literatura	10

V dnešním článku se budeme zabývat pravděpodobností, která bude demonstrována na hodech kostkou a mincí. Vysvětlíme si, co je průnik pravděpodobností a sjednocení neslučitelných jevů.

V druhé kapitole si vysvětlíme, co to je binomické rozdělení, ale nejdříve si vysvětlíme faktoriál a kombinační číslo. Binomické rozdělení představuje počet úspěchu „ k “ při „ n “ pokusech. Praktické použití daného rozdělení si ukážeme opět na hod mincí.



1 Pravděpodobnost

1.1 Teorie

Základní definice pro pravděpodobnost je: Pokud určitý jev (proces) může vykázat „ n “ různých vzájemně se vyskytujících výsledků, které jsou stejně možné (například hod kostkou na základě symetrie – hodnota 1 až 6), a jestliže při „ m “ těchto výsledcích nastal sledovaný jev „ A “ (například hodnota 6 na kostce) a zbylých „ $n-m$ “ výsledků daný jev vylučuje, potom pravděpodobnost jevu „ A “ je rovná číslu „ m/n “ a zapíšeme to $P(A) = m/n$ [1]. Zjednodušeně pravděpodobnost jevu „ A “ je poměr příznivých výsledků „ m “ k počtu všech možných výsledků „ n “.

$$p(A) = \frac{m_{\text{počet příznivých výsledků}}}{n_{\text{počet všech možných výsledků}}}$$

Co to je pravděpodobnost?

Pravděpodobnost je poměr příznivých výsledků k počtu všech možných výsledků.



Náhodný pokus je nějaká činnost, jejíž výsledek závisí na náhodě (hod kostkou/ mincí).

Náhodný jev je výsledek náhodného pokusu (padne 1, padne rub) a označuje se velkým písmenem (A, B ...). Pravděpodobnost opačného jevu (padne 2–6, padne líc) se označuje pruhem nad velkým písmenem ($\bar{A}$; $\bar{B}$).

Pravděpodobnost jevu je vždy menší, nebo rovna 1. Pravděpodobnost nemožného jevu je 0 a jistého jevu je 1.

Pravděpodobnost jevu „A“ a opačného jevu „ $\bar{A}$ “ je rovna 1 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Základní jevový prostor: množina všech možných výsledků náhodného pokusu (1–6 / rub, líc, hrana)



1.2 Demonstrace pravděpodobnosti na hodech dvěma kostkami

Při hodu 2 kostkami můžeme dostat hodnotu od 2–12 s 36 kombinacemi. Ale ne každá hodnota má stejnou pravděpodobnost. Vysvětlíme si to na příkladu 3 hodnot 12; 4 a 7

12 => 1 možnost (2,8 %), získáme hodem:

6 + 6

4 => 3 možnosti (8,3 %), získáme hodem:

1 + 3; 3 + 1; 2 + 2;

7 => 6 možností (16,7 %), získáme hodem:

1 + 6; 6 + 1; 2 + 5; 5 + 2; 3 + 4; 4 + 3

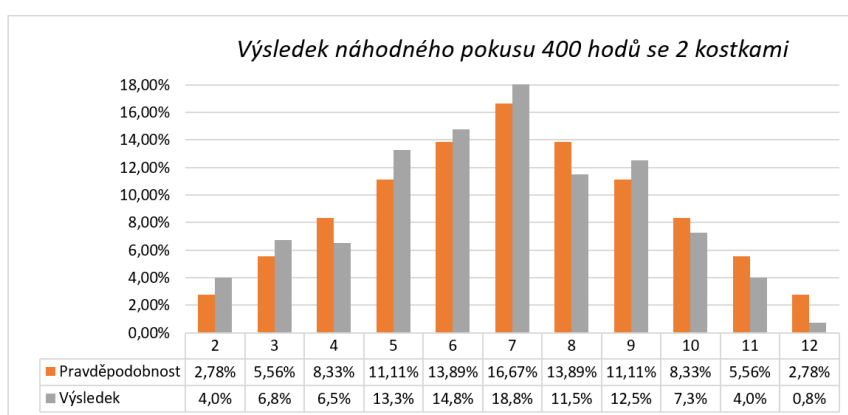
V tabulce níže je přehled možností a pravděpodobností pro všech 12 hodnot.

Hodnota	Možnosti	Pravděpodobnost
2	1	2,8 %
3	2	5,6 %
4	3	8,3 %
5	4	11,1 %
6	5	13,9 %
7	6	16,7 %
8	5	13,9 %
9	4	11,1 %
10	3	8,3 %
11	2	5,6 %
12	1	2,8 %

V tabulce a na grafu níže je demonstrace náhodného pokusu na 400 hodech se dvěma kostkami. Při daném pokusu ale nebyla zohledněná orientace kostek při hodech (například na obou kostkách byla 1 nahoře). Kostky byly hozené bez definované (kontrolované) orientace při hodech. Při definované orientaci kostek by daný náhodný pokus mohl

nejspíše skončit s jinou pravděpodobností pro jednotlivé hodnoty, ale stále by se dal považovat za náhodný pokus, protože výsledek by byl stále částečně ovlivněn parametry jako: síla hození kostek, úhel/ náklon hodu a dopad kostek na plochu, rotace kostek ...

Hodnota	Počet	%	Pravděpodobnost
2	16	4,0 %	2,78 %
3	27	6,8 %	5,56 %
4	26	6,5 %	8,33 %
5	53	13,3 %	11,11 %
6	59	14,8 %	13,89 %
7	75	18,8 %	16,67 %
8	46	11,5 %	13,89 %
9	50	12,5 %	11,11 %
10	29	7,3 %	8,33 %
11	16	4,0 %	5,56 %
12	3	0,8 %	2,78 %



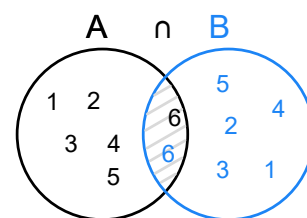
Výsledek pro naše 3 příkladové hodnoty byl:

- Hodnota 12 s 0,8 % oproti 2,8% pravděpodobnosti
- Hodnota 4 s 6,5 % oproti 8,3% pravděpodobnosti
- Hodnota 7 s 18,8 % oproti 16,7% pravděpodobnosti

1.3 Pravidla pro počítání pravděpodobností

1.3.1 Průnik pravděpodobností

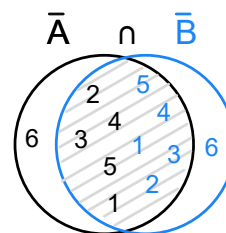
Zůstaneme při hodu se 2 kostkami a budeme chtít vědět, jaká je pravděpodobnost, že na obou kostkách padne 6 (1 příznivý výsledek a 6 možných výsledků). Jedná se o **průnik 2 nezávislých pravděpodobností** – pokud nastane jev A, neovlivní to jev B, a naopak pokud nastane jev B, neovlivní to jev A. V tomto případě se **pravděpodobnosti násobí** [2].



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 2,77 \%$$

V náhodném pokusu 400 hodů se 2 kostkami nastal daný jev 3×, což odpovídá 0,75 % případů oproti pravděpodobnosti 2,77 %.

Anebo pravděpodobnost opačného jevu, nepadne ani jednou 6. Pravděpodobnost, že padne hodnota 1–5 (5 příznivých výsledků a 6 možných výsledků).



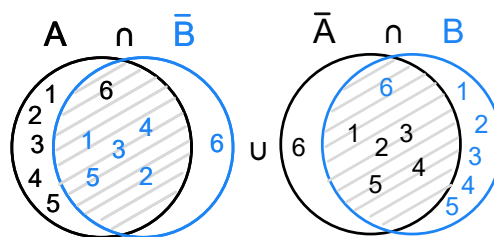
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} = 69,44 \%$$

V pokusu 400 hodů se 2 kostkami nastal daný jev 313×, což představuje 78,25 % případů, oproti pravděpodobnosti 69,44 %. To je rozdíl mezi statistikou a realitou. Statisticky měl daný jev nastat v 69,44 % případů, což odpovídá 277,7 hodů, ale ve skutečnosti daný jev nastal při 313 hodech (rozdíl je 8,81 %, nebo 35 hodů).

1.3.2 Sjednocení neslučitelných jevů

Případ, kdy chceme vědět pravděpodobnost, že padne jenom 1× šestka. Jedná se o pravděpodobnost, kdy šestka:

- padne při prvním hodu (první kostka), ale nepadne při druhém hodu (druhá kostka): $P(A \cap \bar{B})$ (průnik pravděpodobnosti „A“ a pravděpodobnosti opačného jevu $\bar{B}$), nebo
- nepadne při prvním hodu (první kostka), ale padne při druhém hodu (druhá kostka): $P(\bar{A} \cap B)$ (průnik opačného jevu $\bar{A}$ a pravděpodobnosti „B“).



Při sjednocení se pravděpodobnosti sečtou:

$$P_1(A \cap \bar{B}) \cup P_2(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36} = 27,77 \%$$

V náhodném pokusu 400 hodů se 2 kostkami nastal daný jev 84×, což odpovídá 21 %.

1.4 Hod mincí

Při přípravě tohoto článku jsem narazil na hypotézu, že při hodu mincí nemá každá strana stejnou pravděpodobnost. Důvodem by mělo být složení mincí z více kovů. Protože rád zkoumám a dělám pokusy, udělal jsem pokus s hodem 4 různými mincemi na podložku, a to:

- 1 oz stříbrnou mincí Britanica (mince z téměř čistého stříbra)
- 2 EUR mincí (slitiny mědi a niklu)
- českou 50- (ocel pokovená mědi, měď a zinek ve středu) a 20-(slitina mědi a zinku) korunovou mincí.

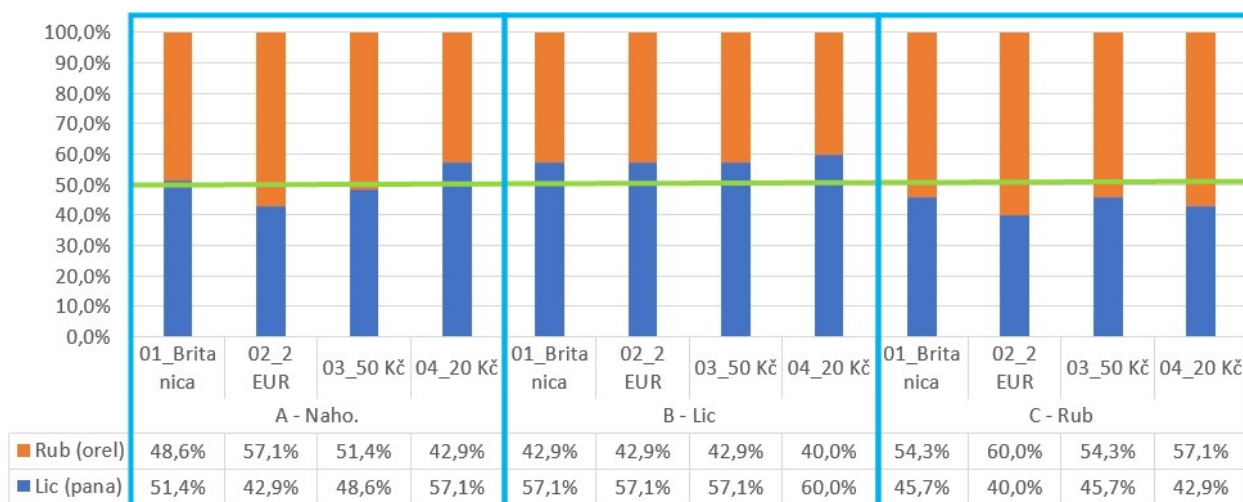


Nejprve jsem udělal náhodných 35 hodů s mincemi na podložku bez určení, kterou stranou byla mince orientovaná při hodu. Výsledek je označen v grafu níže jako „A-náhodný hod“.

Pak mě napadlo, jestli na výsledek nebude mít vliv, kterou stranou je mince při daném hodu (pokusu) orientovaná. Rozhodl jsem se házet mince lícem (znak/Panna) nahoru, výsledek je označen v grafu níže jako „B-Lic“. Většina mincí padla lícem nahoru.

Abych výsledek potvrdil, pokus jsem zopakoval s otočením mince rubem (hodnota/orel) nahoru, výsledek je označen v grafu níže jako „C-Rub“. Výsledek byl podobný, mince pro změnu padaly rubem nahoru.

Můj závěr je, že větší pravděpodobnost má ta strana mince, kterou je mince házená. Je možné, že výsledek hodů by mohl být jiný, kdybych mince chytal ve vzduchu – v tom případě by na výsledek mělo vliv, kdy bude daná rotující mince zachycená rukou ve vzduchu.



2 Náhodná veličina a binomické rozdělení

Pro binomické rozdělení budeme potřebovat vědět, co to je „n-faktoriál“ ($n!$) a kombinační číslo „n nad k“ ($\binom{n}{k}$). Faktoriál ($n!$) se používá v kombinatorice a udává počet permutací „P(n)“, tedy kolika způsoby je možno uspořádat „n“ prvků vedle sebe.



Faktoriál čísla je součin všech přirozených čísel, která jsou menší, nebo rovna danému číslu, přičemž pro „0“ platí „ $0! = 1$ “. Faktoriál nuly ($0!$) je zvláštní případ a stejně jako faktoriál jedné ($1!$) se rovná 1.

Praktická ukázka uspořádání $3! = 6$

1.	1	2	3
2.	1	3	2
3.	2	1	3
4.	2	3	1
5.	3	2	1
6.	3	1	2

Faktoriál	Výpočet	Hodnota
$0!$	-	1
$1!$	1	1
$2!$	$1 \cdot 2$	2
$3!$	$1 \cdot 2 \cdot 3$	6
$4!$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$	24
$5!$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$	120

Kombinace se počítá kombinačním číslem a vzorec je: $C_n(k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Příkladem je výběr 3 studentů z 10.

$$C_{10}(3) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{3\,628\,800}{6 \cdot 5\,040} = 120 \text{ možných kombinací}$$

Kombinační číslo v Excelu je funkce „KOMBINACE“ anebo „COMBIN“

Normální rozdělení se týká spojité náhodné proměnné (jako jsou váha, teplota, naměřená hodnota ...), binomické rozdělení popisuje náhodné chování diskrétní proměnné. Pomocí binomického rozdělení se modeluje chování četnosti prvků, které mají určitou vlastnost, v prostém náhodném výběru, nebo variabilitu počtu nezávislých experimentů, jež skončily specifikovaným výsledkem. Pomocí tohoto rozdělení lze také popsat náhodné chování relativních četností [3].

Binomické rozdělení „Bi(n,p)“ představuje počet úspěchů „k“ v „n“ nezávislých pokusech. Předpoklady pro vznik náhodné proměnné „X“ s binomickým rozdělením jsou následující:

- Provádíme n pozorování anebo pokusů;
- Pozorování nebo pokusy jsou nezávislé – znalost výsledku v jednom pozorování anebo pokusu nám nic neříká o výsledku jiného pozorování;
- Výsledky pozorování anebo pokusu mohou být jenom dva: úspěch, nebo neúspěch;
- Pravděpodobnost p každého úspěchu je stejná pro všechna pozorování nebo pokusy [3].

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

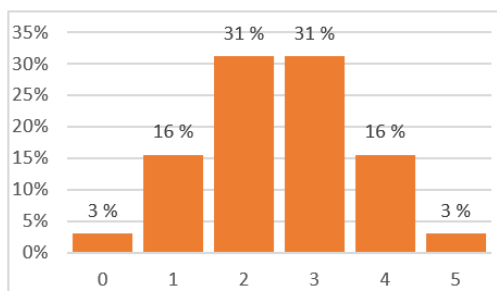
Pro vysvětlení použijeme příklad hodu s 5 mincemi a chceme vědět, jaká je pravděpodobnost, že na 3 mincích padne „rub“ (hodnota mince/ orel). Budeme uvažovat, že pravděpodobnost je $p = \frac{1}{2}$ (rub, nebo líc, zanedbáme tedy možnost, že by mince mohla padnout a zůstala by na hraně), výsledky na všech 5 mincích jsou náhodné a nezávislé jevy. Pravděpodobnost tohoto jevu vypočítáme následovně:

$$p_n(k) = p_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10 \cdot 0,125 \cdot 0,25 = 0,3125$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{120}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

Pravděpodobnost pro jednotlivé jevy je zobrazená v tabulce níže:

k	p(A)	[%]
0	0,03125	3 %
1	0,15625	16 %
2	0,31250	31 %
3	0,31250	31 %
4	0,15625	16 %
5	0,03125	3 %
Sum=	1	100 %



Případně jaká je pravděpodobnost, že při 5 a 10 hodech kostkou padne určité číslo. Pravděpodobnost hodů je v tomto případě $p = 1/6$.

Pravděpodobnost, že daná hodnota padne 3×, je při 5 hodech 3,22 % a při 10 hodech se pravděpodobnost zvýší na 15,5 %. Ale například pravděpodobnost, že dané číslo padne jenom 1×, je větší při 5 hodech 40,19 % než při 10 hodech, a to 32,3 %.

S počtem hodu se snižuje pravděpodobnost, že daná hodnota padne jenom 1×, ale pravděpodobněji padne vícekrát.

$$p_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-k}$$

k	p(A)	[%]
0	0,4019	40,19 %
1	0,4019	40,19 %
2	0,1608	16,08 %
3	0,0322	3,22 %
4	0,0032	0,32 %
5	0,0001	0,01 %

k	p(A)	[%]
0	0,1615	16,1506 %
1	0,3230	32,3011 %
2	0,2907	29,0710 %
3	0,1550	15,5045 %
4	0,0543	5,4266 %
5	0,0130	1,3024 %
6	2,17E-03	0,2171 %
7	2,48E-04	0,0248 %
8	1,86E-05	0,0019 %
9	8,27E-07	0,0001 %
10	1,65E-08	0,0000 %

Použitá literatura

- [1] Statistické metody řízení jakosti, Fabian F., Horálek V., Chmelík V., Chodounský J., Král J., Křepela J., ČSJ, Praha 2007, ISBN 978-80-02-01897-1, s. c3;
- [2] Počet pravděpodobnosti v příkladech, Hebák P., Kahounová J., Informatorium, Praha 2014, ISBN 978-80-7333-10-92, s. 15, 22
- [3] Přehled statistických metod: analýza a metaanalýza dat, Hendl J., vydání páté, Praha: Portál, 2015, ISBN 978-80-262-0981-2, s.140–141